IL CALCOLO APPROSSIMATO. DIMENSIONI CULTURALI E DIDATTICHE. 1

Carlo Felice Manara

Alcuni aspetti del calcolo approssimato rappresentano importanti capisaldi concettuali e formativi. Contribuiscono, infatti, a fondare su basi consistenti la capacità di analisi critica nel trattare alcune informazioni di tipo numerico.

Qualche anno fa su vari giornali comparve una notizia che pretendeva di avere un valore storico: ricordo di aver letto un titolo del tipo: «Siamo in 5 miliardi!»; nel corso dell'articolo si spiegava che ad una certa ora, di un certo giorno ben determinato, in un paese (se ben ricordo) dell'Europa balcanica, era nato un bambinno che era il 5 miliardesimo abitante del nostro pianeta.

Matematica o cabala

La notizia era presentata, da un giornalista pieno di entusiasmo, anche come una specie di trionfo della statistica, e addirittura della matematica. Personalmente non posso fare a meno di pensare che atteggiamenti di questo genere siano proprio l'opposto di ciò che occorre per dar della matematica una giusta immagine. Infatti, a mio parere, la matematica è anche uno strumento di deduzione e di comunicazione; e la comunicazione ha un senso se vengono trasmessi dei messaggi attendibili ed onestamente controllabili. Invece in questo caso il messaggio, trasmesso con gli strumenti del linguaggio matematico, era ovviamente privo di senso, e perciò disonesto. Si pensi infatti alla imprecisione nella determinazione del numero degli abitanti di intere nazioni (la Cina, per esempio) o di interi continenti (l'America latina, per esempio, o l'Oceania); in questi casi infatti le migliori stime demografiche che si possono fare sono affette da errori che possono variare dall'ordine di grandezza di 100 mila al milione; quindi è chiarmente priva di senso la pretesa di dare una approssimazione di una unità sul miliardo, come la notizia giornalistica pretendeva di fare. Per farsi un'idea del significato dell'informazione che si voleva fornire, si pensi che la distanza media della Luna dalla Terra è di 384.400 km e quindi di 384,4 milioni di metri; il fornire la distanza con l'ordine di approssimazione di una unità sul miliardo equivarrebbe, per analogia, al poter dare la distanza dalla Terra alla Luna con l'approssimazione del decimetro o della spanna. Non mi risulta che ciò sia stato fatto ancora; ma è certo che per dare una informazione attendibile di questo tipo occorre utilizzare delle tecnologie molto raffinate, e comunque molto più valide di quelle utilizzate dai giornalisti che diffondevano la pretesa notizia.
Ci si potrebbe consolare pensando che la diffusione di pseudo notizie sballate è notoriamente una delle abitudini di un certo giornalismo, così come il giocherellare con i numeri è una delle qualità professionali del cabalista; a questo proposito ricordo di aver letto delle argomentazioni abbastanza singolari su uno dei numerosissimi libri che tratta delle Piramidi d'Egitto; in questo libro, nelle pagine dedicate alla grande piramide di Cheope (che sta a Giza), erano ripetute molte curiosità di tipo numerologico che attirano l'attenzione di tanti studiosi della civiltà egiziana e di tanti pretesi scopritori di misteri nascosti; tra l'altro, l'autore ripeteva un'affermazione cara a tanti che giocherellano con queste cose: egli diceva che nelle misure della Grande Piramide sono contenute delle importanti profezie, che si sono avverate nei secoli della nostra Storia: profezie che riguardano, per esempio, la scoperta dell'America, la Rivoluzione francese e avvenimenti storici dello stesso calibro. La cosa che rendeva grottesco il discorso era, tra l'altro, il fatto che queste pretese profezie erano, per così dire, lette sulle misure dei monumenti espresse in metri e centimetri; dimentichiamo per il momento il fatto (ovviamente ritenuto trascurabile da chi scriveva) che gli antichi Egiziani certo non misuravano in metri, e che quindi difficilmente potevano lasciarci delle profezie con questo linguaggio; ma il fatto più immediato, che salta agli occhi di chiunque osservi una fotografia, è che gli spigoli dei massi costituenti il monumento sono fortemente smussati dalle intemperie e da altre cause, di modo che il dare in centimetri la lunghezza dalla base della piramide è una impresa impossibile, e la relativa informazione è priva di senso.
Gli esempi riportati, ed altri moltissimi che si potrebbero citare, sono una prova della opinione, molto diffusa, che ogni informazione data per mezzo di numeri sia precisa ed incontestabile, perché viene indissolubilmente associata alla matematica, e questa, come è noto, è la scienza della certezza e della precisione assoluta.
Nella mente di molti le ragioni che fondano il possesso di queste prerogative (precisione e certezza) da parte della matematica sono spesso un po' oscure; forse sono anche inconsciamente legate a sensazioni di misteriose magie, ed a pratiche astrologiche di profezia. Si spiega così anche il fatto che, per esempio, in S. Agostino il termine «mathematicus» indica l'astrologo che pretende di emettere profezie in forza di certi suoi misteriosi calcoli[1].

Didattica e calcolo numerico

L'opinione che considera la matematica come la «scienza dei numeri» per eccellenza può condurre agli atteggiamenti grotteschi di cui abbiamo detto poco fa; tuttavia occorre anche osservare che le questioni riguardanti il calcolo numerico rappresentano, per così dire, il momento finale della elaborazione matematica della immagine e della conoscenza del mondo; il momento in cui la matematica mostra la presa che essa può dare sulla realtà esterna a noi. Ma per ben comprendere il significato e la portata degli strumenti potentissimi che la scienza mette a nostra disposizione attraverso il pensiero matematico, occorre riflettere sulla natura e sul significato del linguaggio matematico. Esso è strumen-

[1] In tale senso è preso il termine per esempio nel Cap. 3 del Libro IV delle *Confessioni* di S. Agostino.

to di deduzione certa e di informazione precisa; ed in questo ordine di idee, la deduzione certa può essere realizzata mediante il calcolo numerico, e l'informazione precisa ed onesta deve avvenire anche con la corretta utilizzazione del simbolismo. Le pagine che seguono sono appunto dedicate ad esporre qualche riflessione su questi aspetti della matematica e del suo insegnamento; aspetti che forse non sono sempre tenuti nella debita considerazione da parte degli insegnanti. A scusante di questi ultimi va detto che essi debbono dedicare anche troppo tempo all'insegnamento degli aspetti formali dell'algebra e (dove sia possibile) dell'analisi matematica; e quindi non hanno il tempo per sviluppare anche gli argomenti riguardanti il calcolo numerico. Argomenti che darebbero occasione di svolgere un notevole lavoro di formazione alla critica ed alla riflessione; e che permetterebbero anche di dissipare alcuni modi di pensare, secondo i quali spesso l'insegnamento della matematica pecca di eccessiva astrazione e di fondamentale inutilità pratica.

Lo sviluppo equilibrato e sensato del calcolo numerico, anche nelle scuole dell'ordine medio, potrebbe prendere l'avvio da una riflessione sul significato della soluzione di un problema matematico; da un punto di vista molto generale, si potrebbe dire che lo scopo della procedura di soluzione di un problema cosiffatto è sostanzialmente la acquisizione razionale di informazioni, in numero ed in qualità superiori a quelle che si avevano all'inizio della procedura stessa.
Così se il problema è geometrico, le informazioni iniziali vengono chiamate «dati» del problema, e di solito forniscono certi elementi geometrici (punti e loro posizioni, o, in generale, figure geometriche); le informazioni che si vogliono acquisire riguardano la posizione di certi altri punti e le procedure per costruirli, o per costruire certe altre figure. L'acquisizione delle nuove e sufficienti informazioni deve avvenire in modo razionale, perché deve essere ottenuta mediante il ragionamento, e precisamente con quelle procedure di analisi deduttiva e di sintesi che già la matematica greca aveva codificato.
Se i dati del problema sono di tipo numerico, la procedura di acquisizione di nuove informazioni è generalmente quella deduzione che si realizza nel calcolo; questo infatti è da considerarsi come una forma di deduzione, cioè di applicazione delle regole sintattiche del simbolismo adottato.
Tra le informazioni che si posseggono all'inizio della deduzione si possono elencare anche i risultati di certe misure che riguardano grandezze fisiche (per esempio certi pesi specifici, o certe conduttività ecc.) ed i risultati di certi calcoli già eseguiti e noti pubblicamente da tempo; esempi di questi risultati sono quelli contenuti nelle tavole numeriche: tavole dei quadrati e dei cubi, delle radici quadrate e cubiche, dei logaritmi naturali e decimali, dei valori delle funzioni trigonometriche più comuni e dei loro logaritmi eccetera; si potrebbero elencare qui anche quelle costanti che in certa manualistica elementre sono chiamate «numeri fissi», e le altre costanti utilizzate nei calcoli finanziari.
Possiamo qui fare alcune osservazioni, che saranno utilizzate nel seguito della nostra esposizione. Osserviamo anzitutto che queste informazioni numeriche sono date quasi sempre sotto forma di numeri razionali, e che comunque, quando si vogliano ottenere sotto forma numerica le informazioni, oggetto di un problema, occorre partire da approssimazioni razionali dei numeri considerati.
In secondo luogo, osserviamo che i numeri razionali, in questo genere di problemi, sono assegnati sotto forma di frazioni decimali; cioè con quegli strumenti simbolici convenzionali che vengono abitualmente chiamati «numeri decimali». Alla manovra corretta di questi simboli ed alla loro interpretazione dedicheremo le riflessioni che seguono.

Le convenzioni decimali

Abbiamo detto che, nella maggioranza dei casi, i dati dei problemi numerici e le informazioni che si traggono da calcoli eseguiti prima (spesso molto prima) di noi sono rappresentati mediante frazioni decimali, con tabelle, tavole e prontuari.
Infatti non ci è mai capitato di incontrare dei problemi in cui la costante P di Archimede (il numero abitualmente chiamato «pigreco», rapporto tra la lunghezza della circonferenza e quella del suo diametro), sia delimitata mediante le classiche diseguaglianze (già esposte da Archimede):

(1) $223/71 < P < 22/7.$

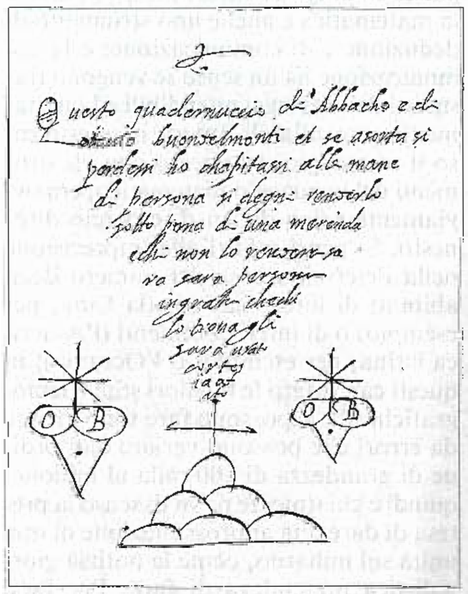
Le convenzioni di rappresentazione delle frazioni decimali che si adottano abitualmente sono particolarmente comode, e sono insegnate agli alunni delle scuole elementari, insieme con le regole per operare con i simboli che si adottano; esse coinvolgono l'impiego di un simbolo che viene chiamato «virgola decimale», e che oggi viene sempre più frequentemente sostituito da un altro simbolo, chiamato «punto decimale», allo scopo di uniformare le nostre notazioni con quelle imposte dalle abitudini della tecnica anglosassone e dell'impiego dei calcolatori elettronici.
Come è noto, in forza di queste convenzioni di scrittura, la frazione decimale:

(2) 3141592654/1000000000

viene scritta più comodamente nella forma:

(3) 3,141592654 oppure 3.141592654

a seconda che si adotti la virgola oppure il punto decimale.
Abbiamo già avuto occasione di osservare, in altre sedi, che l'abitudine di indicare le frazioni decimali con l'espres-



Frontespizio del manoscritto di Ottavio Buondelmonti intitolato *Libro d'abbaco* (sec. XVI-XVII).

sione «numeri decimali» può provocare fraintendimenti ed ingenerare equivoci in chi non abbia molta dimestichezza con i concetti trattati. Infatti qualcuno, non particolarmente provveduto in questo genere di questioni, potrebbe pensare che l'espressione voglia indicare una specie di numeri nuova rispetto a quelle studiate; mentre si tratta semplicemente di convenzioni che si scelgono e si adottano per rappresentare certi numeri razionali. Ma il parlare di numeri decimali è un'abitudine ormai tanto diffusa che l'espressione si incontra anche negli enunciati dei programmi ministeriali di matematica.
Come è noto, le frazioni decimali rappresentano esattamente soltanto alcuni numeri razionali: precisamente i razionali che possono essere rappresentati con frazioni le quali hanno al denominatore una potenza del 10, cioè della base convenzionale della nostra numerazione. Per quanto riguarda la rappresentazione di ogni altro numero razionale, ed a maggior ragione di ogni numero irrazionale, le frazioni decimali possono soltanto dare delle informazioni incomplete. È quindi molto utile riflettere sulla loro natura e sulla loro portata, tenendo conto del fatto che, come si è detto, non soltanto le tavole e le tabelle, ma anche gli elaboratori elettronici forniscono le informazioni sotto questa forma.
L'utilità della riflessione su questi argomenti appare tanto maggiore quanto più estesa è la trascuratezza con la quale gli argomenti stessi sono trattati. Per fornire un solo esempio di questo fatto, citiamo un testo di matematica per la scuola media sul quale si possono leggere delle incredibili affermazioni del tipo seguente: se si calcola 2:3 con un calcolatore tascabile si può ottenere come risultato 0.666666 oppure 0.666667, a seconda della macchinetta utilizzata; il valore esatto (sic!) è 0.66.
Si potrebbe pensare che questo sia un errore casuale, dovuto ad una svista o ad un refuso di stampa; ma nello stesso testo si incontrano delle altre «perle» della stessa grandezza; e ciò ispira una certa tristezza, quando si pensa che si tratta di un testo che ha trovato un editore che lo ha stampato, e degli insegnanti che lo hanno adottato.

Pratica e teoria

L'errore concettuale che abbiamo riportato poco sopra ci introduce in modo naturale nella questione riguardante il significato delle informazioni che vengono date abitualmente con le frazioni decimali.
Infatti può avvenire che si debba rappresentare un certo numero che può essere dato soltanto mediante un algoritmo infinito (come accade con i numeri irrazionali), oppure che si debba rappresentare un numero razionale il quale tuttavia non può essere dato in forma finita con frazioni decimali, come accade per i numeri che vengono chiamati convenzionalmente «decimali periodici». In questi casi viene di solito adottata una delle due seguenti convenzioni: o si scrive soltanto un numero finito delle cifre decimali del numero, oppure, in alcuni determinati casi, si altera l'ultima cifra che si scrive: precisamente si lascia la cifra suddetta inalterata se la prima cifra che si trascura è 0, oppure 1, 2, 3 o 4; si aumenta di una unità l'ultima cifra che si trascrive se la prima cifra che si trascura è 5 oppure 6, 7, 8 o 9.
Nel primo caso, cioè quando si lasciano sempre, metodicamente, inalterate le cifre che si scrivono, e sulle quali si opera, si suol dire che si danno i valori «troncati» del numero in parola; nel secondo caso, cioè quando si altera l'ultima cifra secondo le regole esposte, si suol dire che si danno i valori «arrotondati» del numero stesso.
Così, per esempio, i decimali 0.666666 e 0.666667 forniscono rispettivamente un valore troncato ed un valore arrotondato del razionale 2/3.
La procedura dell'arrotondamento è seguita molto spesso nella tecnica, perché si rivela comoda nella pratica delle misure, oppure nella pratica finanziaria; una procedura analoga è prescritta, per esempio, ai cittadini che fanno la denuncia fiscale dei propri redditi, oppure pagano la tassa di possesso di un autoveicolo. Tuttavia essa non è sempre comoda quando si debbano fare ulteriori elaborazioni delle informazioni che si posseggono, cioè si debbano fare delle deduzioni certe, a partire da ciò che si conosce.
Infatti, quando si sappia che una determinata frazione decimale fornisce un valore troncato di un dato numero, si può facilmente scrivere una coppia di diseguaglianze relative al numero stesso; e ciò permette di valutare comodamente anche il significato e la portata degli eventuali calcoli successivi che lo riguardano. Così, per esempio, è chiaro che valgono le seguenti diseguaglianze:

(4) $$0.666666 < 2/3 < 0.666667.$$

È da ricordarsi tuttavia che molti tra i calcolatori elettronici tascabili che sono in commercio eseguono automaticamente l'arrotondamento sull'ultima cifra dei risultati che si ottengono; e ciò può essere utile per certe questioni della pratica (come si è detto), ma impedisce di conoscere il segno dell'errore che si commette assumendo un decimale come valore approssimato di un numero che si cerca o che si deve utilizzare per ulteriori calcoli. È comunque chiaramente da escludersi che un decimale finito possa dare un valore esatto di un numero che è rappresentato, in linea di principio, da un algoritmo infinito.
Ciò può sorprendere chi ha della matematica una idea mitica e magica come della scienza che non commette errori; invece la cosa più importante è avere la coscienza di commettere degli errori, conoscere esattamente il loro ordine di grandezza, e soprattutto conoscere delle procedure razionali per migliorare con certezza le informazioni che si posseggono, cioè per impicciolire gli errori, quando ciò sia necessario. Si potrebbe dire che, in sintesi, questi sono gli scopi degli sviluppi del calcolo numerico; si può aggiungere che questi concetti rivestono anche una grande importanza per la didattica della matematica, che dovrebbe mirare a dare di questa scienza una immagine corretta, ed a formare, attraverso l'insegnamento, l'abitudine alla obiettività, alla critica, ed all'analisi del significato delle informazioni che si posseggono o che si conseguono con la deduzione, ed in particolare con il calcolo.
Ritorneremo nel seguito su questi concetti; qui ci limitiamo a ricordare ciò che scriveva G. Peano, a proposito dell'insegnamento della matematica e della formazione al rigore che questa scienza conferisce. Secondo le idee di Peano, il rigore consiste nel dire e scrivere soltanto cose vere; pertanto, come vedremo, certe false precisioni, che spesso vengono accettate in forza di risultati ottenuti con potentissimi strumenti di calcolo, sono contrarie a questo concetto di rigore, così come le è contraria quella notizia giornalistica sul 5 miliardesimo essere umano, nato in un preciso momento (specificato con giorno, ora e minuto) in una certa parte del mondo.

Nel seguito daremo qualche idea fondamentale sulle procedure concrete che possono condurre ad eseguire dei calcoli numerici accettabili ed a non fornire delle informazioni inesatte. Qui vorremmo concludere esponendo qualche considerazione a proposito di una espressione che accade di udire e di leggere spesso: si tratta dell'avverbio «praticamente» oppure della espressione avverbiale «in pratica».
È immediato (ed è anche pleonastico) osservare che delle espressioni cosiffatte non hanno alcun significato teorico; ma vorremmo anche osservare che il loro im-

piego può avere diversi significati; uno di questi è positivo, e potrebbe essere esposto dicendo che ogni questione riguardante la materia e la vita reale quotidiana ha un suo ordine di approssimazione, per così dire, ottimale; e che al di là di questo, la ricerca di informazioni e di precisioni ulteriori di calcolo è chiaramente non soltanto inutile, ma anche priva di senso. Tale è la falsa precisione di 1 su 5 miliardi di cui abbiamo detto più di una volta nel conteggio degli esseri umani esistenti sulla Terra: infatti tale informazione non è in alcun modo controllabile, e non ha alcuna portata sulla vita degli esseri umani attualmente esistenti. Analoghe considerazioni potrebbero essere svolte per esempio se un architetto assegnasse le misure degli edifici in muratura che egli progetta con dei numeri che esprimono i millesimi di millimetro: è chiaro infatti che poi, nella pratica della costruzione edilizia muraria, queste misure non soltanto non possono essere rispettate, ma non possono neppure essere eseguite con procedure controllabili e dotate di senso. Invece in certe lavorazioni di meccanica e di ottica occorre indicare le misure in decimi ed anche in centesimi di millimetro. Analoghe considerazioni possono essere svolte a proposito delle indicazioni relative al tempo ed alla misura delle durate; infatti negli orari ferroviari le indicazioni sono date in ore e minuti: sarebbe assolutamente inutile dare le indicazioni fino ai secondi, perché tali informazioni ingombrerebbero soltanto gli stampati, e non avrebbe senso pretendere che siano rispettate. Invece nella misura delle velocità delle discese sugli sci si tiene conto, come è noto, anche del centesimo di secondo. Infatti un punto che si muova di moto rettilineo con la velocità di 100 km/h percorre in un centesimo di secondo poco più di 27 cm; una lunghezza che è comparabile con la profondità antero-posteriore del torace di un essere umano adulto.

Si può pertanto concludere che non esiste un ordine di approssimazione utile per la pratica in generale; infatti per certi scopi pratici può essere sufficiente un'approssimazione di 1 su 1000, in altri casi potrebbe essere insufficiente una approssimazione di 1 su un milione.

E qui nasce spontaneamente la menzione di un secondo modo di utilizzare l'avverbio «praticamente»; modo che non è accettabile, perché condurrebbe qualcuno a pensare che esistano in natura dei numeri da considerarsi in ogni caso come «piccoli», e che quindi si possono sempre trascurare nei calcoli e nella comunicazione delle informazioni. Ciò è falso, ed il fatto che purtroppo si ascolti e si legga con una certa frequenza l'avverbio utilizzato (male) in questo secondo senso non scusa gli autori di testi che lo fanno né gli insegnanti che seguono questa pratica.

Carlo Felice Manara
Università di Milano